**Budapesti Corvinus Egyetem**

**Tudományos Diákköri Konferencia**

# A CDD-call opció gyakorlati alkalmazása

**Bella Klaudia**

Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

Az időjárás számos gazdasági tevékenység esetén kiemelt fontossággal bír. Gondoljunk csak az energia-és áramszolgáltató vállalatokra, a mezőgazdasági termelőkre vagy a turizmusban érdekelt cégekre, amelyek bevételét nagymértékben befolyásolja az időjárás alakulása. A biztosítás hagyományosan csak a természeti katasztrófák, mint például földrengés, hurrikán ellen nyújt védelmet, és ennek megfelelően nem képes kezelni a normál időjárás kisebb kilengéseiből fakadó veszteségeket. Az enyhe téltől tartó gázszolgáltató vagy az aszályos nyártól rettegő termelő viszont szeretné csökkenteni az időjárás változékonyságából eredő kockázatát. Mit tehetnek akkor, ha a biztosítók nem kínálnak megfelelő termékeket? Tőzsdéznek, mégpedig hőmérséklettel, esővel, széllel vagy hóeséssel. Az időjárási derivatívák közül a legkeresettebbek a hőmérsékleti indexeken alapuló termékek, így a dolgozatomban egy ilyen termék, a CDD call opció bemutatására vállalkozom.

A nemzetközi időjárási piac hatalmas változáson ment keresztül az utóbbi évtizedben. A változások hátterében az energiapiac deregulációja állott. A monopolhelyzetben lévő energiaszolgáltató vállalatok korábban az időjárási viszonyoknak megfelelően tudták alakítani az energiaárakat, ami a versenyhelyzet kialakulása után a továbbiakban már nem volt járható út. A keletkező veszteségek csökkentése miatt megjelent az igény az időjárási derivatívák iránt. Az új származtatott termékek fejlődését elősegítette a tőkepiac és a biztosítási piac egymáshoz való közeledése is, ami például a katasztrófa kötvények és opciók megjelenésében is megnyilvánult. Innen már nem kellett sokat várni a különböző időjárási indexeken alapuló termékekre, amelyek végre az időjárási kockázatfedezés hatékony eszközének bizonyultak.

A 2. fejezetben az időjárási derivatívák típusait és tőzsdei kereskedését ismertetem. Az időjárási piac szereplői között éppúgy megtaláljuk a kockázatát fedezni kívánó vállalatot, a spekulánst, mint a pénzintézetet és a biztosítótársaságot. Az általuk hőmérsékletre kötött tőzsdei kontraktusok- elsősorban opciós és swap ügyletek-, a hűtési foknap (CDD) ill. fűtési foknap (HDD) indexeken alapulnak, amelyek kiszámítását és alkalmazását részletesen tárgyalom.

A hőmérsékleti indexen alapuló opciók árazásának kiindulópontja az alaptermék, vagyis a hőmérséklet modellezése. A szakirodalom számos alternatív modellt kínál, amelyek között nem egyszerű a választás. A 3. fejezetben az 1960. január 1. és 2005. június 30. között Budapesten megfigyelt hőmérsékleti adatok segítségével egy konkrét, a gyakorlatban is használható modellt mutatok be.

A hőmérsékleti opciók árazása nem egyszerű feladat. Az arbitrázsmentes árazás ugyanis nem használható, hiszen a hőmérsékleti indexek nem kereskedett alaptermékek. Emiatt más módszer után kell nézni. A 4. fejezetben a szakirodalomban megtalálható különféle megoldásokat ismertetem.

Ezt követően felteszem, hogy egy magyar búzatermelő és egy klímaberendezéseket gyártó cég 2005. júliusára egy CDD-call ügyletet köt. A 3. fejezetben felépített sztochasztikus modell segítségével hőmérsékleti adatokat generálok, ami alapján kirajzolódik a CDD indexek és a várható kifizetések eloszlása, és megtudhatjuk, hogy a tényleges júliusi adatok birtokában milyen kifizetése lesz ennek a hipotetikus ügyletnek.

A dolgozatom célja, hogy rávilágítsak az időjárási derivatívák, elsősorban a hőmérsékleti opciók gyakorlati hasznára, azaz a kockázatkezelésben betöltött fontos szerepükre.

## 2. Az időjárási derivatívák gyakorlati jelentősége

2000-ben az Egyesült Államokban az a szóbeszéd keringett, hogy a Coca-Cola üdítőitalt gyártó vállalat olyan italautomaták létesítését tervezi, amelyek az üdítők árát a kinti hőmérsékletnek megfelelően változtatják. Végül elvetették az ötletet, de a mögötte lévő elképzelés jól kivehető: a ***hőmérséklet*** jelentősen befolyásolja a vállalat pénzáramlását. Ha ugyanis nyáron a hőmérséklet hirtelen néhány fokkal lecsökken, akkor az *üdítőital-gyártók és forgalmazók* megcsappant fogyasztásra számíthatnak. Milyen jó lenne tehát, ha egy forró nyáron olcsóbb lenne az üdítő (Weather Risk Advisory, 2001)!

Az *energiaszolgáltató vállalatok* cash-flowja szintén a hőmérséklet ingadozásától függ: ha a tél viszonylag enyhe, az alacsonyabb energiafogyasztás miatt kevesebb bevételt realizálnak. Az *építőipari cégek* számára viszont igen káros egy elhúzódó tél, mivel az eső, a hó és a hideg lassítja az építkezést.

A *mezőgazdaság* időjárási viszonyoknak való kitettsége mindenki számára egyértelmű. A hőmérséklet mellett az ***eső*** jelenti a legnagyobb kockázati forrást. Ha kevés eső esik, akkor az aszály miatt kicsi lesz a terméshozam, ha viszont túl sok a csapadék, a gabonaszemek nem érnek meg. Egy hirtelen jött jégeső pedig akár teljesen el is pusztíthatja a termést.

A vendéglátóipar és a turizmus is erősen ki van téve az időjárási viszonyoknak: a hűvös nyár és az enyhe, ***hó*** nélküli tél miatt elmaradnak a turisták. A magánvállalkozások mellett a *költségvetési intézmények*ről sem szabad elfeledkezni, hiszen pl. télen az átlagosnál több hóesés következtében hatványozottan megugranak az utak karbantartási költségei (Kántor, 2004).

Az Egyesült Államokban és Európában alternatív energiaforrásként egyre gyakrabban létesítenek *szélerőművek*et. Nyilvánvaló, hogy ezeknek az erőműveknek a szélcsend (és az óriási szélvihar) jelenti a legnagyobb kockázatot: ha nincs ***szél***, akkor nincs elektromos áram és nincs pénz (Weather Risk Advisory, 2001).

A fenti példákból láthattuk, hogy szinte alig van olyan gazdasági szektor, amelyet ne érintene valamilyen formában az időjárás alakulása. A mezőgazdaság, az energiafogyasztás, a turizmus vagy a közlekedés és az időjárás szorosan kapcsolódik egymáshoz. Egy légkondicionáló berendezéseket gyártó cég igen megsínyli a hűvös nyarat, míg az aszályos nyár a mezőgazdaságnak jelent nagy érvágást. Ugyanakkor egy meleg nyár jót tesz az üdítőital-gyártóknak és a turizmusban érdekelt cégeknek (Cao és Wei, 2002; Garman, Blanco és Erickson, 2000). További példaként hozható fel még a ruhaipar, hiszen pl. egy télikabátokat gyártó cég eladása erősen függ az aktuális időjárási viszonyoktól (Agins és Kranhold, 1999).

De mit tehet egy cég, hogy kivédje a szélsőséges időjárásból fakadó anyagi veszteséget? Két lehetőség közül választhat: vagy biztosítást köt, vagy pedig tőzsdézik, mégpedig a neki megfelelő termékkel: hőmérséklettel, esővel, hóval vagy széllel. A két megoldás azonban korántsem egyenértékű. A biztosítás ugyanis nem olyan rugalmas instrumentum, mint egy opciós szerződés. Egy opció bármikor gazdát cserélhet, míg egy időjárási biztosítás hagyományos módon működik: rendszeres díjfizetés ellenében fedezi az esetleges kárt. Ráadásul a vállalatnak bizonyítania kell, hogy valóban kára keletkezett a kedvezőtlen időjárás miatt, és ha erre nem képes, a biztosító nem fizet. Jogosan adódik a kérdés, hogy akkor milyen esetben előnyös mégis egy biztosítási termék? A ***biztosítás*** leginkább ***extrém időjárási viszonyok***, mint például földrengés, hurrikán ***ellen nyújt védelmet***, amelyek bekövetkezési valószínűsége meglehetősen kicsi, de ha mégis előfordulnak, akkor óriási mértékű kár keletkezik. Ráadásul a terméshozam biztosításánál a moral hazard problémája is fennáll. A biztosítás ebből kifolyólag nem előnyös a ***normál időjárás változékonyságának a kivédésére***, arra ***hatékonyabb módszer az időjárási derivatívák***kal történő kereskedés. (Yoo, 2003; Turvey, 2001; Cao és Wei, 2003).

Az időjárási derivatívák viszonylag új termékeknek számítanak, Magyarországon pedig egyelőre még nem kereskednek vele. Nézzük meg, hogy külföldön hogyan fejlődött ki az időjárási piac, kik a piac szereplői és melyek a leginkább keresett termékek!

### 2.1. Kontraktusok

Az első időjárási derivatívára szóló ügyletet 1996-ban kötötte a Koch Energy és az Enron, Milwaukee államban, méghozzá a téli átlaghőmérsékletre. Ez még OTC (over the counter, tőzsdén kívüli) módon történt, amiben a CME (Chigaco Mercantile Exchange, a világ legnagyobb árutőzsdéje) meglátta a lehetőséget, és 1999 szeptemberében felvette az elektronikus rendszerébe a határidős kereskedést. Ezek után a Chicago Board of Trade (CBOT) is bevezette a katasztrófa-kötvényeket és opciókat (Barrieu és El Karoui, 2002). A kereskedés igazán az El Niňo jelenség hatására vett lendületet, amely tovább gyorsította az időjárási derivatívák terjedését. 2001-ben a frankfurti értéktőzsdét üzemeltető Deutsche Börse és a londoni LIFFE (London Internationel Financial Futures Exchange) után a Euronext is felvette kínálatába az időjárási kontraktusokat. 1999-től 2001 végéig származékos időjárás-termékekkel 75 millió dollár értékben kereskedtek az európai OTC-piacon, az Egyesült Államokban pedig évente több mint 4000 szerződést kötnek, átlagosan 8 milliárd dolláros forgalomban (Kántor, 2004).

A fent említett tőzsdék a szokásos módon, termékként kezelik az időjárást, ezért úgynevezett időjárás-indexeket hoztak létre. Az indexek négy fő termékre vonatkoznak, amelyeknek a változására lehet ügyleteket kötni. Ezek az alaptermékek a szél, az eső, a fagy (vagy hó) és a hőmérséklet. Ugyan egészen kifinomult üzletet is lehet kötni, mondjuk arra, hogy egy adott hónapban hány milliméter eső esik, a legtöbb céget azonban a hőmérséklet alakulása befolyásolja, ezért ezeknél a termékeknél legnagyobb a forgalom (Kántor, 2004; Richards, Manfredo és Sanders, 2004). Az időjárási derivatívák formája lehet swap, határidős ügylet, put és call opció.

Az időjárási derivatívák kedvező tulajdonságai ellenére a piac csak lassan növekszik. Vegyük sorra, hogy mely tényezők okozzák a likviditás hiányát!

1. Legnagyobb gondot az időjárási adatok minősége és beszerzésének a költsége jelenti. Azoknak a vállalatoknak, amelyek saját lehetőségeiket historikus adatok segítségével kívánják feltérképezni, információért a nemzeti meteorológiai szolgálatokhoz kell fordulniuk, számolva azzal, hogy egyes országokban ezért jelentős összeget kell fizetni. Az adatok minősége is nagyon fontos, hiszen csak ebben az esetben lehet az időjárási derivatívákat beárazni (Alaton, Djehiche és Stillberger, 2001).
2. Nincsen minden esetben használható időjárási index, ill. nem biztos, hogy a szokásos indexszámítás megfelel az adott ország éghajlati sajátosságainak. Például a hőmérsékleti indexeknél az Egyesült Államokban jól bevált 18 $^{o}$C-os referenciaértéket átvették az európai tőzsdék is, holott nem biztos, hogy ez megfelelő a magyar, svéd vagy

spanyol időjárási piacon (Manfredo, Richards és Sanders, 2004; Alaton, Djehiche és Stillberger, 2001).

3. Jelentős báziskockázattal kell szembenézniük azoknak a cégeknek, akik az időjárási indexeken alapuló derivatívákat kockázatuk fedezésére szeretnék felhasználni. A kereskedés során ugyanis általában egy nagyobb városra számított időjárási indexet használnak, míg számos cég működési helye valószínűleg egy környező kisvárosban található, ahol nyilvánvalóan más ugyanennek az indexnek az értéke. A két index eltérés tehát báziskockázatot okoz, ami különösen nagy lehet egy mezőgazdasági termelő esetében (Manfredo, Richards és Sanders, 2004).
4. Nincsen egy általánosan elfogadott árazási modell, ami megnehezíti az időjárási indexek értékelését. A közismert Black-Scholes árazási modell ugyanis ebben az esetben nem használható, mivel az a feltételezés áll mögötte, hogy az alaptermék véletlen bolyongást követ, és nem tér vissza egy átlagos értékhez. Ez a CDD és HDD időjárási indexek esetében azt jelentené, hogy a hőmérséklet időben növekszik, és bármekkora értéket felvehet. Nyilvánvaló, hogy ez a nem állja meg a helyét. Számos alternatív modell született, amelyek között viszont nehéz a választás (Garman, Blanco, és Erickson, 2000; Dischel, 1998; Nelken, Turvey, 2001).

A fenti problémák ellenére érdemes az időjárási derivatívákkal foglalkozni, mivel a kockázatkezelés fontos eszközét jelentik. A továbbiakban csak a hőmérsékletre fókuszálok, mivel egy forró nyártól tartó mezőgazdasági termelő helyzetét vizsgálom meg.

Mielőtt konkrétan rátérnék a termékek árazására, tisztázzunk először néhány fogalmat.

*Hőmérséklet*

Ha adott egy bizonyos időjárási helyzet, akkor legyen $T_i^{max}$ és $T_i^{min}$ egy adott i-edik napon, Celsius fokban mért maximális és minimális hőmérséklet. Ekkor az i-edik napi átlaghőmérsékletet a következőképpen definiáljuk: $T_i \equiv (T_i^{max} + T_i^{min})/2$. Az így kapott értéket foknapnak nevezzük, mely az időjárási derivatívák egyik fontos változója.

*Fűtési és hűtési foknapok*

Legyen $T_i$ az i-edik napi átlaghőmérséklet. Ennek felhasználásával a következőképp definiálhatjuk az erre a napra vonatkozó fűtési foknapot ($HDD_i$, Heating Degree Days) ill. hűtési foknapot ($CDD_i$ ,Cooling Degree Days):

$$HDD_i \equiv \max\{18- T_i, 0\}, \tag{2.10}$$

és

$$CDDi \equiv \max\{T_i-18, 0\}. \tag{2.11}$$

Ahogy a definícióból kiderül, viszonyítási hőmérsékletként a 18 Celsius-fokot használják. De miért éppen ezzel az értékkel számolnak? A válasz egyszerű: a CME-n a 65 Fahrenheit-fokot (18,3 ≈ 18 Celsius-fok) tartják határvonalnak, mivel évekkel ezelőtt ez alatt a hőmérséklet alatt kapcsolták be a fűtést az Egyesült Államokban. Most benchmarkként használja a piac, ez alatt a lakosság több energiát használ fűtésre, fölötte pedig több energiát légkondicionálásra. A viszonyítási foktól való negatív eltérés tehát a HDD, míg a pozitív eltérés a CDD. A HDD számítása során figyelembe vett időszak novembertől márciusig tart, míg a CDD esetében májustól szeptemberig. Az április és az október ebből a szempontból „mostoha" hónapoknak tekinthetők (Alaton, Djehiche és Stillberger, 2001).

A Chicago Mercantile Exchange kínálatában a legjelentősebb termékek az ún. CME Foknap Indexre (CME Degree Day Index, a napi HDD vagy CDD értékek kumulatív összege) szóló határidős ügyletek és opciók. Egy ***HDD/CDD Index futures*** olyan eladási vagy vételi szerződés, amely egy meghatározott jövőbeli időpontra szól, és a HDD/CDD Index értéket most rögzítjük. Az egy CME Foknap Indexre szóló kontraktus értéke 100 dollár, és az ügyleten keletkező nyereséget vagy veszteséget naponta elszámolják.

A CME ***HDD vagy CDD call opció*** olyan szerződés, amely az egyik félnek jogot biztosít egy HDD/CDD futures szerződés megvételére a jövőben egy előre rögzített árfolyamon. Ezzel ellentétesen egy HDD/CDD put opció tulajdonosának egy HDD/CDD futures eladására nyílik lehetősége. A CME-n kizárólag európai opciókkal kereskednek, ami azt jelenti, hogy az opciót csak a lejárat napján lehet lehívni (Alaton, Djehiche és Stillberger, 2001).

### 2.2. Időjárási opciók és swapok

A tőzsdei kereskedés mellett az OTC- piacon is évente több ezer szerződést kötnek időjárási termékekre. A legelterjedtebb időjárási kontraktus a HDD/CDD opció. Az alaptermék (W) ebben az esetben az *n* napból álló kötési időszakra kiszámított napi HDD és CDD értékek kumulatív összege, azaz

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} HDD_i \text{ ill. } C_n = \sum_{i=1}^{n} CDD_i \qquad (2.20)$$

A HDD call vásárlója a szerződés megkötésekor opciós díjat fizet a kötelezettséget vállaló fél számára. Amennyiben a HDD index az adott időszakban nagyobb lesz, mint az előre meghatározott lehívási index, akkor a kettő különbségét megszorozzák az ún. foknap-pont (tick) értékkel. Az így adódó szorzat ($P_0$) és az opciós díj különbsége lesz az opció vásárlója által realizált hozam (Alaton, Djehiche és Stillberger, 2001).

Most nézzünk meg egy példát az indexek kiszámítására! 25 HDD például azt jelenti, hogy a napi átlaghőmérséklet 40 Fahrenheit-fok (65-40=25). Ha egy városban novemberben az átlag napi HDD 25, novemberben pedig 30 nap van, akkor a HDD-index 750 arra a városra (25*30=750). A CDD kiszámítása ugyanez fordítva: 10 CDD azt jelenti, hogy 75 Fahrenheit fok van (75-65=10). Amennyiben a 31 napos júliusban ezt az értéket veszi fel a napi átlag CDD, a júliusi CDD index 310 lenne. A CME a foknap-pont értéket 100 dollárban határozta meg, a két indexre kötendő ügyletek nominális értékét pedig minden HDD ill. CDD után 20 dollárban. Ezek alapján a fent említett novemberi HDD nominális értéke 15.000 dollár, és minden egyes foknap-pont elmozdulás 100 dollárt ér (Kántor, 2004).

Az indexek definiálása után nézzük meg, hogy milyen paraméterek segítségével lehet megadni lehet egy általános időjárási derivatívát (Zeng, 2000):

- A derivatív fajtája: swap, vételi (call) vagy eladási (put) opció
- A kötési időszak (pl. 2005. május 1-jétől 2005. szeptember 30-ig)
- Az alaptermékként szolgáló időjárási index (W), amely általában HDD vagy CDD index
- Egy hivatalos meteorológiai állomásról származó hőmérsékleti adatsor
- A lehívási index az opcióknál ill. referenciaindex a swapnál (S)
- A foknap-pont (tick) érték (k)

- Az opciós díj nagysága
- A maximális kifizetés nagysága (h), (amennyiben ebben is megállapodnak)

A fenti paraméterek segítségével az opció kifizetését az alábbi módon kapjuk meg (Zeng, 2000):

$$P_{call} = k^* \max (W-S, 0) \tag{2.21}$$

$$P_{put} = k^* \max (S-W, 0) \tag{2.22}$$

A bináris kifizetés sémája tehát a következő:

$$P_{call}=P_0 \text{ ha } W-S>0; \text{ ill. } P_{call}=0 \text{ ha } W-S\leq 0 \tag{2.23}$$

$$P_{put} =P_0 \text{ ha } W-S<0; \text{ ill. } P_{put} =0 \text{ ha } W-S\geq 0 \tag{2.24}$$

Egy esetleges extrém időjárásnak köszönhetően az opció kifizetése akár a végtelenbe is tarthat. A szerződő felek gyakran védekeznek ez ellen ún. plafonráta (cap) meghatározásával. Ebben az esetben az opció kifizetése a következőre módosul (Garman, Blanco, Erickson, 2000):

$$P_{call} =\min \{k^* \max (W-S, 0); h\} \tag{2.25}$$

$$P_{put} =\min \{k^* \max (S-W, 0); h\} \tag{2.26}$$

Az időjárási opció definiálása után most nézzünk meg egy példát a gyakorlati alkalmazására! Amennyiben egy vállalat a téli foknapok historikus adataiból azt olvassa ki, hogy az elmúlt 24 évben minimum 1409 HDD és maximum 1964 HDD volt, tehát átlagban 1644 HDD, valamint a téli időjárás-előrejelzés szerint az átlagosnál hidegebb tél várható, akkor eldöntheti, hogy mit tesz: vállalja a hidegebb tél által okozott károkat, vagy fedezeti ügyletet köt. Opciós ügyletet például, ahol 1750 HDD-re vásárol 100 kontraktust. Ennek meghatározott opciós díja van, amit a vevő fizet az eladónak. Tegyük fel, hogy ez 310 ezer dollár, ezért az összegért veszi meg a vállalat a 100 kontratusnyi 1750 HDD indexet. Amennyiben a HHD index a meghatározott időszakban meghaladja az 1750-t, vagyis hidegebb tél lesz, mint amit az 1750-es HDD feltételez, akkor a valódi HDD és az opció közötti szorzat értékét kapja meg a vállalat, megszorozva az úgynevezett foknap-pont (tick) értékkel. Tegyük fel, hogy a kemény tél következtében 1900 HDD lett az index, ebben az esetben a hozam (1900-1750)*100*100-310 000 = 1 190 000 dollár, azaz (1900-1750) szorozva 100 kontraktussal, szorozva 100 dolláros tick-kel, mínusz a prémium értéke. Ezzel az összeggel fedezheti a vállalat a hideg tél miatti veszteségét. Persze előfordulhat, hogy a megadott értéknél alacsonyabb HDD-t kapunk, vagyis melegebb lesz a tél - ebben az esetben a vállalat ráfizet, viszont akkor sokkal kisebb a karbantartási ráfordítás (Kántor, 2004).

A fent ismertetett paraméterek segítségével lehet jellemezni a swap ügyletet is, azzal a különbséggel, hogy itt egyik fél sem fizet opciós díjat. A legelterjedtebb időjárási swap típusnál csak egy időpontban „cserélik el" a pénzáramlást, szemben például a kamatlábswappal, ahol több időpontban is történik cash-flow csere. Az egy csereidőpont miatt az időjárási swapot határidős szerződésként is felfoghatjuk (Alaton, Djehiche és Stillberger, 2001).

A swap kifizetését a következő módon írhatjuk fel (Zeng, 2000):

$$P_{swap} = k^* (W-S) \qquad (2.27)$$

A szerződés során az eladó egy P =k* (W-S) összeget fizet ki a vevőnek, amennyiben P pozitív értéket vesz fel. Negatív P esetében a pénzáramlás iránya fordított, a vevő fizet az eladónak. Ezek alapján a bináris kifizetés sémája a következő:

$$P_{swap} = P_0 \text{ ha } W-S>0; \text{ ill. } P_{swap} = -P_0 \text{ ha } W-S \leq 0 \qquad (2.28)$$

Egy standard HDD swap esetében a felek megállapodnak egy referenciaindexben, majd elcserélnek pl. 1000 euró/HDD összeget.

### 2.3. Az időjárási piac szereplői

Az időjárási derivatívák segítségével számos vállalat képes az időjárási kitettségéből fakadó kockázatát csökkenteni. Néhány egyszerű példa segítségével nézzük meg, hogy ez a gyakorlatban hogyan is történik!

Egy gázszolgáltató cég például bizonytalan abban, hogy a tél vajon hideg lesz-e, így kiír egy HDD call opciót. Amennyiben a tél meglehetősen enyhének bizonyul, az opciós díj némileg kompenzálja a bevételkiesést. Másrészről, ha a tél igen kemény lesz, a gázszolgáltató cég magas bevételre tesz szert, amelyből könnyedén teljesíti az opcióból eredő kötelezettségét. A vállalt tehát az opció révén csökkenteni tudta az időjárási viszonyok miatti kockázatát.

Egy klímaberendezéseket gyártó cég viszont attól tart, hogy eladásai megcsappannak, ha hűvös nyár lesz. Veszteségének fedezésére szerződést köthet arra, hogy bizonyos napokon 18 fok alá csökken a hőmérséklet, azaz kiír egy CDD call opciót. Amennyiben ez bekövetkezik, az ügylet volumenének megfelelően kap egy pénzösszeget, amellyel fedezheti az eladások kieséséből származó veszteségét. Mint a "hagyományos" érték- vagy árutőzsdén, itt is megtaláljuk az ellentétes oldalt, aki attól tart, hogy túl meleg lesz a nyár - mondjuk egy aszálytól tartó mezőgazdasági társaság, akinek az ellentétes ügylete fedezi a klímaberendezést gyártó cég által bezsebelt összeget, vagyis a többszereplős piac teljes egészében saját magát finanszírozza (Kántor, 2004).

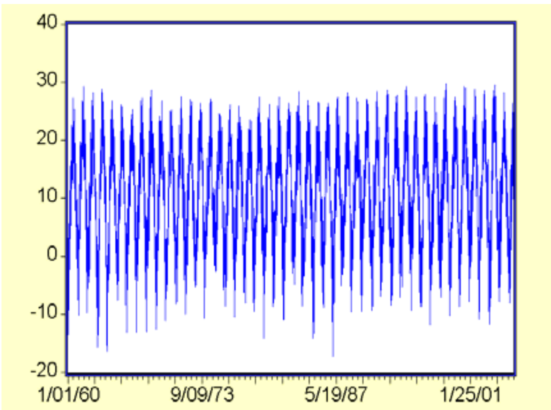
A *fedezeti ügyletkötők* mellett az időjárási tőzsde további jelentős résztvevői a *spekulánsok*, akik a hagyományos piacokhoz hasonlóan a megkötött ügyletek árainak eltéréseiből remélnek hasznot. Ők a gabonapiacon lévő spekulánsokhoz hasonlítanak a leginkább: időjárási kontraktusokra kötnek eladási és vételi opciókat- anélkül, hogy valójában a hőmérséklet ingadozása által okozott károkat fedeznék-, és a vétel illetve eladás közötti hasznot zsebelik be.

Az időjárási piac fontos szereplői még a *biztosítók* és a *pénzintézetek*. Az utóbbiak közvetítő szerepet vállalnak, ők adják a know-how-t az ügyletek megkötéséhez. A biztosítók pedig különböző természeti katasztrófák ellen nyújtanak védelmet.

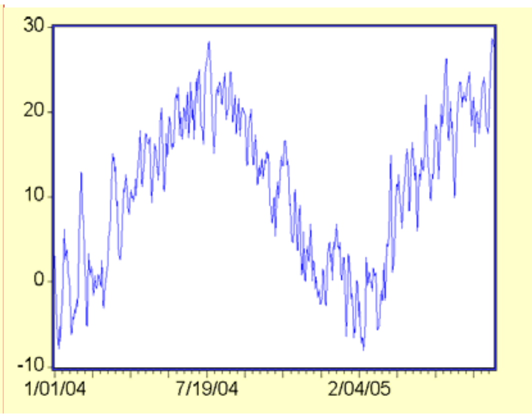
## 3. A hőmérséklet modellezése

Amennyiben biztonsággal szeretnénk derivatívákat árazni, elengedhetetlen, hogy az adott alaptermék- jelen esetben a hőmérséklet- természetét jól írjuk le. A helyes modell megtalálásához historikus adatokat hívtam segítségül, méghozzá az 1960. január 1. és 2005. július 31. között Budapesten mért és $^{o}$C-ban kifejezett napi középhőmérsékleti adatokat. Az idősort két részre osztottam: az 1960. január 1. és 2005. június 30. közötti első részt modellalkotásra, míg az utolsó egy hónapot tesztelésre használtam. Az 1. és a 2. ábrára rápillantva azonnal szembetűnik, hogy a hőmérsékleti adatok a nyári és téli hónapok között szezonálisan változnak, de hosszú távon egy átlagos értékhez tartanak.

**1. ábra: Napi középhőmérsékletek, Budapest, 1960-2005. júl.**[1]



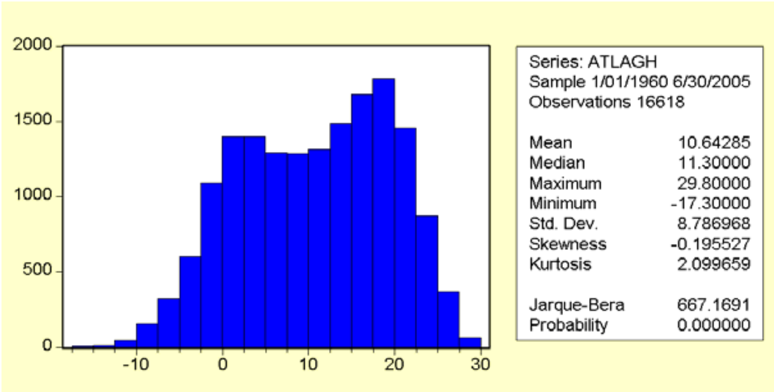

**2. ábra: Napi középhőmérsékletek, Budapest, 2004. jan. 1.-2005. júl.31.**




A 3. ábra alapján nézzük meg a fenti „tanuló idősor" leíró statisztikáit. A ferdeség (skewness) az idősor aszimmetriáját méri. Jelen esetben ez -0,2, azaz nulla körüli érték, amely szimmetrikus eloszlásra utal. A kurtosis az idősor lapultságát ill. csúcsosságát vizsgálja. Normális eloszlás esetében a kurtosis 3, míg annál kisebb érték lapultabb eloszlásra utal. A vizsgált idősorunk kurtosisa 2, tehát a normálisnál valamivel lapultabb az eloszlása. A Jarque-Bera két szabadságfokkal rendelkező chi- négyzet statisztika, amely azt teszteli, hogy az idősor normális eloszlást követ-e. A nullhipotézis ebben az esetben az, hogy az idősor normális eloszlást követ. A 0,0000 p-érték azt jelenti, hogy az idősorunk nem normális eloszlású, (ami egyébként jól látható az ábráról is).

[1] Adatok forrása: Országos Meteorológiai Szolgálat időjárási napi jelentései

**3. ábra: Napi középhőmérsékleti adatok leíró statisztikái**




Az idősorunk az ADF teszt alapján stacionárius -mivel ahogy azt az 1. táblázat mutatja-, minden szignifikancia szinten elutasítjuk azt a nullhipotézist, hogy az idősor egységgyök folyamat.

**1. táblázat: Egységgyök keresés**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **ADF Test Statistic** | **-8.490262** | 1% Critical Value* | -2.5659 |
| | | 5% Critical Value | -1.9393 |
| | | 10% Critical Value | -1.6156 |

*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.

Cao és Wei (2002) szerint egy hőmérsékleti modellnek a következő tulajdonságokkal kell rendelkeznie:

1. szezonális komponenst kell tartalmaznia;
2. a napi középhőmérsékletnek egy „átlagos” érték körül kell mozognia;
3. legyen benne autoregresszivitás
4. a téli hónapoknak magasabb a szórása, mint nyáriaknak;
5. tükrözze a globális felmelegedést.

A szakirodalomban a hőmérséklet modellezésének többféle módszere ismert, de a legtöbben sztochasztikus folyamatot, mégpedig Brown- mozgást használnak. Az alternatív becslő modellek közé tartozik (a) az egyszerű Brown- mozgás, (b) Brown- mozgás átlaghoz való visszahúzással, (c) Brown- mozgás átlaghoz való visszahúzással és lognormális ugrásokkal, valamint (d) Brown- mozgás átlaghoz való visszahúzással, lognormális ugrásokkal és ARCH folyamattal (Richards, Manfredo és Sanders, 2004).

A (d) változat a következő módon írható le:

$$dw_t = \mathrm{K}\left(\alpha_w\left(w_t, t\right) - \lambda\phi - w_t\right)dt + h_t\left(w_t, t\right)dz + \phi dq\ , \tag{3.00}$$

ahol w a napi középhőmérséklet Celsius fokban kifejezve, $\alpha_w$ a folyamat átlaga, K az átlaghoz való visszahúzás sebessége, és dz Wiener –folyamatot jelöl, azaz E(dz)=0 és $E(dz^2)$=dt. A hőmérsékletben bekövetkező diszkrét ugrások véletlen sokkok ($\phi$), valamint $\lambda$ paraméterű Poisson folyamat (q) segítségével írhatók le. A véletlen sokkok lognormális eloszlást követnek, vagyis $\ln\left(1+\phi\right) \sim N\left(\gamma - 0{,}5\delta^2, \delta^2\right)$, ahol $\delta^2$ az ugrási komponens varianciája. A Poisson folyamat eloszlása pedig a következő:

$$dq = \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda dt & \textit{valószínűséggel} \\ 1 & \lambda dt & \textit{valószínűséggel} \end{bmatrix}. \tag{3.01}$$

A hőmérséklet szintjében és volatilitásában meglévő szezonalitás miatt a (3.00) egyenlet átlagát és varianciáját a hőmérséklet és az idő függvényében fejezik ki:

$$\alpha\left(w_t, t\right) = \gamma_0 + \gamma_1 \sin(2\pi/365) + \gamma_2 \cos(2\pi/365) + \gamma_3 t + \sum_{j=1}^{p} p_j w_{t-j}\ , \tag{3.02}$$

ahol az optimális késleltetés a Schwartz kritérium alapján p=3.

A modell képes kezelni az időben változó volatilitást is, méghozzá az ARCH folyamat segítségével:

$$h\left(w_t, t\right) = E_{t-1}\left(\sigma_{wt}^2\right) = \gamma_0 + \gamma_1\left(w_{t-1} - \alpha_w\right)^2 \tag{3.03}$$

A továbbiakban én az egyszerűbb (b) változatot használom a hőmérséklet modellezésére.

### 3.1. Az átlaghőmérséklet

West (2002); Yoo (2003); valamint Alaton, Djehiche és Stillberger (2001) egymáshoz hasonló modelleket állítottak fel, mivel az idősorból mindannyian szezonális komponenst és trendet választottak le. A t időpontbeli középhőmérsékletre, azaz $T_t^m$ –re a következő modellt írták fel:

$$T_t^m = A + Bt + C\sin(wt+\varphi) + \sum_{j=1}^{p} p_j T_{t-j}^m \qquad (3.10)$$

A szezonalitást egy szinusz függvény írja le, amelynél $t$ az időt jelenti napokban kifejezve. Az oszcillálás időtartama (a szökőéveket figyelmen kívül hagyva) egy év, ezért azt kapjuk, hogy $w=2\pi/365$. Továbbá, mivel az éves minimum és maximum középhőmérséklet általában nem január 1-jén ill. június 1-jén fordul elő, fáziseltolódással kell számolni, amit $\varphi$ fejez ki. Az adatokban megjelenő –és a globális felmelegedésnek köszönhető-pozitív növekedési ütemet lineáris trenddel közelítik. A hőmérsékleti adatokban meglévő autokorrelációt pedig az előző $p$ nap során megfigyelt adatok szerepeltetésével lehet kezelni. Az ismeretlen paraméterek tehát $A, B, C, \varphi$ és $p_j$, amelyekre a 45,5 éves idősor felhasználásával készítettem becslést. Az általam használt becslőfüggvény a következő volt:

$Y_t=a_1+a_2t+a_3sin(2\pi/365\ t)+a_4cos(2\pi/365\ t)+p_j\ AR(j)$, ahol

$$A=a_1$$
$$B=a_2 \qquad (3.11)$$
$$C=(a_3{}^2 + a_4{}^2)^{\wedge 1/2}$$
$$\varphi=arctan(a_4/a_3)-\pi$$

Az adatsor alapján a következő paraméterbecslést kaptam:

**2. táblázat: Paraméterbecslés eredménye**

Dependent Variable: ATLAGH
Method: Least Squares
Date: 04/18/06 Time: 18:44
Sample(adjusted): 1/04/1960 6/30/2005
Included observations: 16615 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 3 iterations

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | **10.16104** | 0.165952 | 61.22882 | 0.0000 |
| T | **6.02E-05** | 1.73E-05 | 3.482144 | 0.0005 |
| @SIN(WT) | **-3.884847** | 0.117013 | -33.20023 | 0.0000 |
| @COS(WT) | **-10.56196** | 0.116958 | -90.30523 | 0.0000 |
| AR(1) | **1.017397** | 0.007729 | 131.6327 | 0.0000 |
| AR(2) | **-0.296535** | 0.010806 | -27.44094 | 0.0000 |
| AR(3) | **0.088943** | 0.007729 | 11.50754 | 0.0000 |

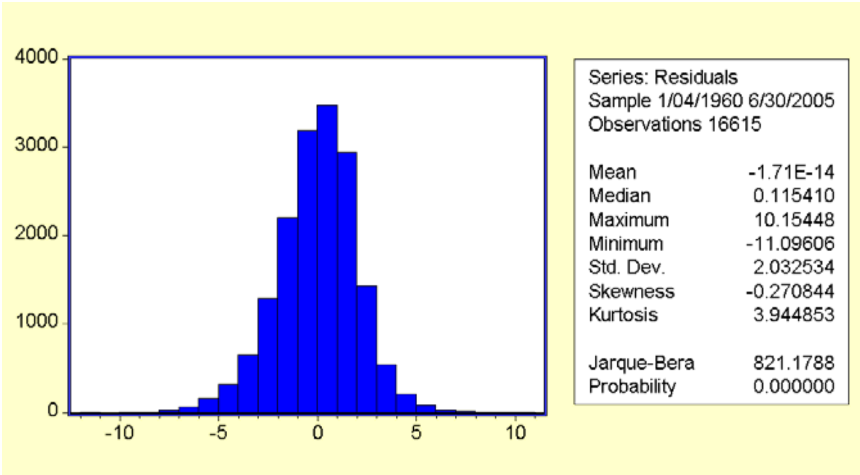
| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.946494 | Mean dependent var | 10.64447 |
| Adjusted R-squared | 0.946475 | S.D. dependent var | 8.786932 |
| S.E. of regression | 2.032901 | Akaike info criterion | 4.257226 |
| Sum squared resid | 68635.64 | Schwarz criterion | 4.260477 |
| Log likelihood | -35359.90 | F-statistic | 48964.70 |
| Durbin-Watson stat | 2.003234 | Prob(F-statistic) | 0.000000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Inverted AR Roots | .78 | .12+.32i | .12 -.32i |

A paraméterek transzformációja után a következő **modell** (3.12) írható fel:

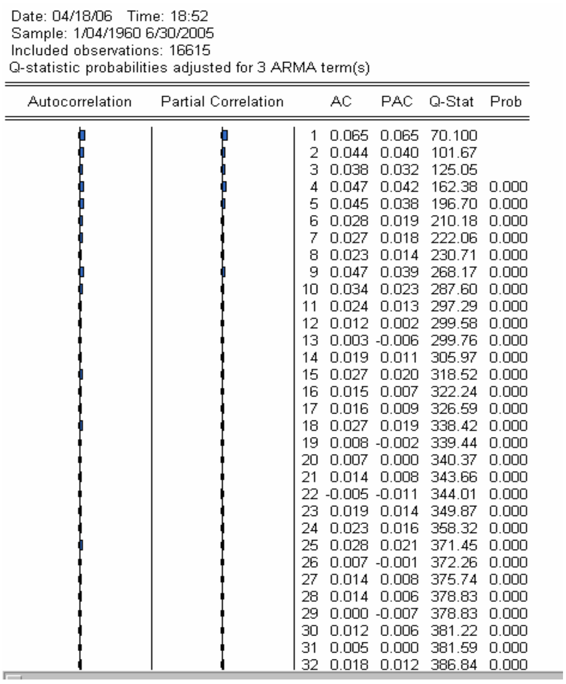
$T_t^m$ *=10,16+5,99 10*$^{-5}$*t+11,25 sin(2π/365 t-1,92)+1,02 AR(1)-0,29 AR(2)+0,09 AR(3*A szinusz függvény **amplitúdója** tehát kb.11$^{o}$C, ami azt jelenti, hogy egy átlagos téli ill. nyári napon mért középhőmérséklet kb. 22 $^{o}$C-kal tér el egymástól. A **trend** láthatóan nagyon kicsi, de a 45,5 év alatt kb. 1 $^{o}$C hőmérséklet emelkedést okoz. A reziduum átlaga 0 körüli, szórása 2, és a Jarque-Bera teszt szerint nem követ normális eloszlást.

**5. ábra: Reziduum eloszlása és leíró statisztikái**




A reziduumok négyzetösszegére illesztett korrelogram jól mutatja, hogy sikerült kiszűrni az adatokban lévő autokorrelációt.

**6. ábra**



Date: 04/18/06 Time: 18:52
Sample: 1/04/1960 6/30/2005
Included observations: 16615
Q-statistic probabilities adjusted for 3 ARMA term(s)

| Autocorrelation | Partial Correlation | | AC | PAC | Q-Stat | Prob |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 0.065 | 0.065 | 70.100 | |
| | | 2 | 0.044 | 0.040 | 101.67 | |
| | | 3 | 0.038 | 0.032 | 125.05 | |
| | | 4 | 0.047 | 0.042 | 162.38 | 0.000 |
| | | 5 | 0.045 | 0.038 | 196.70 | 0.000 |
| | | 6 | 0.028 | 0.019 | 210.18 | 0.000 |
| | | 7 | 0.027 | 0.018 | 222.06 | 0.000 |
| | | 8 | 0.023 | 0.014 | 230.71 | 0.000 |
| | | 9 | 0.047 | 0.039 | 268.17 | 0.000 |
| | | 10 | 0.034 | 0.023 | 287.60 | 0.000 |
| | | 11 | 0.024 | 0.013 | 297.29 | 0.000 |
| | | 12 | 0.012 | 0.002 | 299.58 | 0.000 |
| | | 13 | 0.003 | -0.006 | 299.76 | 0.000 |
| | | 14 | 0.019 | 0.011 | 305.97 | 0.000 |
| | | 15 | 0.027 | 0.020 | 318.52 | 0.000 |
| | | 16 | 0.015 | 0.007 | 322.24 | 0.000 |
| | | 17 | 0.016 | 0.009 | 326.59 | 0.000 |
| | | 18 | 0.027 | 0.019 | 338.42 | 0.000 |
| | | 19 | 0.008 | -0.002 | 339.44 | 0.000 |
| | | 20 | 0.007 | 0.000 | 340.37 | 0.000 |
| | | 21 | 0.014 | 0.008 | 343.66 | 0.000 |
| | | 22 | -0.005 | -0.011 | 344.01 | 0.000 |
| | | 23 | 0.019 | 0.014 | 349.87 | 0.000 |
| | | 24 | 0.023 | 0.016 | 358.32 | 0.000 |
| | | 25 | 0.028 | 0.021 | 371.45 | 0.000 |
| | | 26 | 0.007 | -0.001 | 372.26 | 0.000 |
| | | 27 | 0.014 | 0.008 | 375.74 | 0.000 |
| | | 28 | 0.014 | 0.006 | 378.83 | 0.000 |
| | | 29 | 0.000 | -0.007 | 378.83 | 0.000 |
| | | 30 | 0.012 | 0.006 | 381.22 | 0.000 |
| | | 31 | 0.005 | 0.000 | 381.59 | 0.000 |
| | | 32 | 0.018 | 0.012 | 386.84 | 0.000 |

### 3.2. Szórásbecslés

Mivel a hőmérséklet sajnálatos módon nem determinisztikus, így a (3.12) modellt módosítani kell. Az idősort megvizsgálva azt kaptam, hogy a napi átlaghőmérséklet varianciája eltérő az év egyes hónapjai között, de egy-egy hónap során közel állandónak tekinthető. Télen különösen magas a napi középhőmérsékleti adatok szórása, míg nyáron és kora ősszel alacsonyabb. Ezek alapján a következőképp lehet $\sigma_t$-t definiálni:

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1, & \text{januárban} \\ \sigma_2, & \text{februárban} \\ \dots & \dots \\ \sigma_{12}, & \text{decemberben} \end{cases} \tag{3.20}$$

Ha adott egy $N_\mu$ napból álló, $\mu$ -vel jelölt hónap, akkor jelölje a hónap során megfigyelt hőmérsékleti adatokat $T_j$, ahol $j$=1,…, $N_\mu$. A szórás becslésekor az átlagtól vett négyzetes eltérések összegét használtam:

$$\overline{\sigma_\mu^2} = \frac{1}{N_\mu} \sum_{j=0}^{N_\mu - 1} \left(T_{j+1} - T_j\right)^2 \tag{3.21}$$

A becslőfüggvény alapján az egyes hónapokra az alábbi szórás értékeket kaptam:

**3. táblázat: Szórásbecslés**

| hónap | becslés |
|---|---|
| január | 2,53 |
| február | 2,14 |
| március | 2,10 |
| április | 2,20 |
| május | 2,11 |
| június | 2,00 |
| július | 2,09 |
| augusztus | 1,92 |
| szeptember | 1,80 |
| október | 1,96 |
| november | 2,28 |
| december | 2,45 |

Látható, hogy a vártnak megfelelően a téli hónapokban a legmagasabb a napi középhőmérsékleti adatok szórása. Meglepő azonban, hogy Magyarországon nem nyáron tapasztalható a legkisebb szórás, hanem ősszel.

### 3.3. Átlaghoz való visszahúzás

Nyilvánvaló, hogy hosszú távon a hőmérséklet nem képes nap mint nap növekedni, ami azt jelenti, hogy a hőmérséklet –rövidebb időszaktól eltekintve- nem tér el jelentősen egy átlagos értéktől, vagyis a hőmérsékletet leíró sztochasztikus folyamatnak lesz egy átlaghoz való visszatérési tulajdonsága. Alaton, Djehiche és Stillberger (2001) szerint a következő sztochasztikus folyamattal lehet modellezni a hőmérsékletet.

$$dT_t = a\left(T_t^m - T_t\right)dt + \sigma_t dW_t, \tag{3.30}$$

ahol $a \in R$ az átlaghoz való visszatérés sebességét mutatja. Egy ilyen egyenlet megoldását Ornstein-Uhlenbeck folyamatnak nevezik. A fenti egyenlet azonban csak akkor fog hosszú távon $T_t^m$ -hoz visszatérni, ha hozzáadjuk a következő tagot:

$$\frac{dT_t^m}{dt} = B + wC\cos(wt + \varphi) \tag{3.31}$$

Kiindulva egy kezdeti $T_s = x$ napi középhőmérsékletből, **a hőmérsékletre a következő modell írható fel**:

$$dT_t = \left\{\frac{dT_t^m}{dt} + a\left(T_t^m - T_t\right)\right\}dt + \sigma_t dW_t,\ t > s, \tag{3.32}$$

amelynek a **megoldás**a:

$$T_t = \left(x - T_s^m\right)e^{-a(t-s)} + T_t^m + \int_s^t e^{-a(t-\tau)}\sigma_\tau dW_\tau \tag{3.33}$$

ahol

$$T_t^m = A + Bt + C\sin(wt + \varphi) + \sum_{j=1}^{p} p_j T_{t-j}^m .$$

A visszahúzás $a$ paraméterének megbecslésére Bibby és Sørensen (1995) a martingál becslési függvény módszert ajánlja.

Ha adott n napra vonatkozó megfigyelés, akkora $a$ paraméter optimális becslőfüggvénye $\overline{a_n}$, amit a következő egyenlet segítségével kapunk meg:

$$G_n\left(\overline{a_n}\right) = 0 \tag{3.34}$$

ahol

$$G_n\left(a_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\dot{b}\left(T_{i-1};a\right)}{\sigma_{i-1}^2}\left\{T_i - E\left[T_i \middle| T_{i-1}\right]\right\} \tag{3.35}$$

Az egyenletben $\dot{b}\left(T_t;a\right)$ a napi középhőmérséklet deriváltját jelöli, ahol $a$ az eltolódás mértékét fejezi ki:

$$b\left(T_t;a\right) = \frac{dT_t^m}{dt} + a\left(T_t^m - T_t\right) \tag{3.36}$$

A kiinduló egyenlet megoldásához meg kell még határozni $E\left[T_i \middle| T_{i-1}\right]$-t. A következő egyenletet hívjuk ehhez segítségül:

$$T_t = \left(T_s - T_s^m\right)e^{-a(t-s)} + T_t^m + \int_s^t e^{-a(t-\tau)}\sigma_\tau dW_\tau \tag{3.37}$$

Ebből már kifejezhető $E\left[T_i \middle| T_{i-1}\right]$:

$$E\left[T_i \middle| T_{i-1}\right] = \left(T_{i-1} - T_{i-1}^m\right)e^{-a} + T_i^m \tag{3.38}$$

ahol

$$T_t^m = A + Bt + C\sin(wt + \varphi) + \sum_{j=1}^{p} p_j T_{t-j}^m .$$

Mindezek alapján

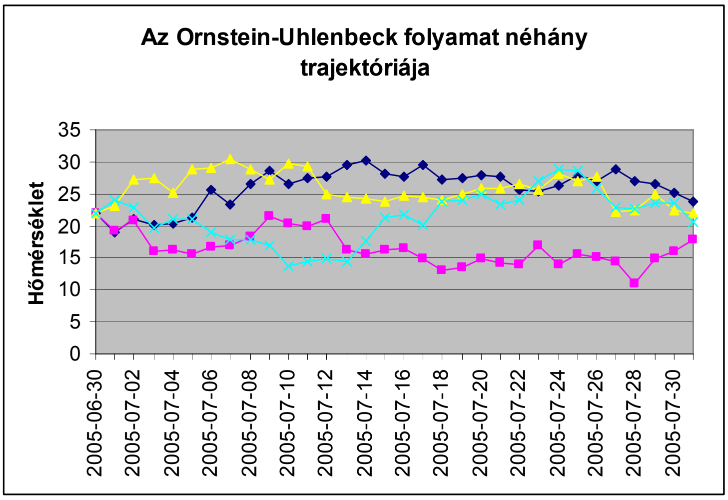
$$G_n\left(a\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_{i-1}^m - T_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2}\left\{T_i - \left(T_{i-1} - T_{i-1}^m\right)e^{-a} + T_i^m\right\}, \tag{3.39}$$

amelyből már $a$ becslőfüggvénye könnyedén kifejezhető:

$$\overline{a_n} = -\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{T_{i-1}^m - T_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2}\left\{T_i - T_i^m\right\}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{T_{i-1}^m - T_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2}\left\{T_{i-1} - T_{i-1}^m\right\}}\right).$$

Ha az egyes hónapokra kapott szórásértékeket behelyettesítjük a fenti egyenletbe, akkor $\bar{a}$=**0,0827** becslést kapjuk. Most már ismerjük a modellünk minden paraméterét, így az Ornstein-Uhlenbeck folyamat néhány trajektóriáját 2005. júliusára szimulálni tudjuk.

**5. ábra: Az Ornstein-Uhlenbeck folyamat néhány trajektóriája**



# 4. Nem kereskedett alaptermék problémája

Fisher Black és Myron Scholes 1973-ban alkotta meg a manapság széles körben használt opcióárazási modellt. Sajnos azonban a Black-Scholes formula olyan feltételeken alapul, amelyek időjárási derivatívák esetében igen messze állnak a valóságtól.

A modell egyik fontos feltétele, hogy az alaptermék (jelen esetben CDD vagy HDD) átlaghoz való visszatérés nélküli véletlen bolyongást követ, vagyis a hőmérséklet varianciája időben növekszik, és nullától (Kelvin fokban) a végtelenig (melegebb, mint a Nap) bármilyen értéket felvehet. Ehelyett a hőmérséklet egy szűkebb sávban mozog, ami mögött valószínűleg az átlaghoz való visszahúzás jelensége áll. Ráadásul az időjárás nem tekinthető a megszokott értelemben vett „bolyongásnak”, mivel csak rövid távon mozog véletlenszerűen, és akkor is a hosszú távú átlagos érték körül. Mindezek következtében a rövid távra szóló időjárási derivatívák alapvetően eltérő módon viselkednek a hosszú távra szólóktól.

A Black-Scholes modell az opció kifizetését az alapterméknek a szerződés lejártának napján felvett értéke határozza meg. Ezzel ellentétben az időjárási derivatíváknál az alapterméknek az egész periódus alatt felvett értékeit figyelembe kell venni. Ily módon az időjárási opciók inkább az ázsiai opciókhoz hasonlítanak, amelyeknél a kifizetés az alaptermék által az opció futamidejének egy része alatt elért átlagárfolyam határozza meg.

Továbbá az időjárási derivatívák kifizetései legtöbbször felülről limitáltak, ami nem igaz a standard Black-Scholes modellre.

Az alaptermék (hőmérséklet vagy eső) pedig nem kereskedett, ami miatt normál esetben nem lehet használni **(a) kockázatsemleges árazást**. Amikor ugyanis az alapváltozó nem kereskedett befektetési termék, az opció ára függ az alapváltozó várható driftjétől és kockázatának piaci árától. Ez abból a tényből fakad, hogy csak a kereskedett befektetési termékek használhatók kockázatmentes fedezeti ügylet kialakításánál. Ha viszont ismert a kockázat piaci ára vagy feltehetőleg nulla, akkor az időjárási derivatívák árazására is lehet a kockázatsemleges értékelést használni (Hull, 1999).

Alaton, Djehiche és Stillberger (2001), valamint Yoo (2003) **kockázatsemleges ekvivalens martingál valószínűségi mértéket** definiál, és a várt kifizetést kockázatmentes kamatlábbal diszkontálja.

Pirrong és Yermakyan egy általános egyensúlyi árazási modellt vezet le, amely **explicit** módon tartalmazza a nem kereskedett alaptermék **kockázati prémium**át, míg a Cao és Wei (2003) által felállított modell **implicit** módon foglalja magába a nem kereskedett eszköz **kockázati prémiumát**.

Richards, Manfredo és Sanders (2004) azt feltételezi, hogy a kockázat piaci ára nem lehet nulla, mivel az aggregált gazdasági output és az időjárás nem független egymástól. Úgy vélik azonban, hogy a piaci kockázat árát meg lehet becsülni a Lucas-féle általános egyensúlyi modell keretében. A modell egy tiszta cseregazdaságot feltételez, amelyben a termelés exogén és az ügynökök hasznosságmaximalizálók. Két változó van: a termelés ($y_t$) és a hőmérséklet ($w_t$). A gazdaságban minden kibocsátást az ügynökök birtokolnak, aminek következtében a tulajdoni részesedéseik $d_t$ nagyságú aggregált osztalékot biztosítanak számukra. Egyensúlyban az aggregált osztaléknagyság megegyezik a fogyasztással. Az aggregált osztaléknagyság autoregresszív folyamatot követ, vagyis a t-edik időpontbeli értéke függ az előző évi értékétől, valamint a korábbi évek hőmérsékleti értékeitől:

$$d_t = \alpha_1 d_{t-1} + \phi_1 \varepsilon_t + \phi_2 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \phi_k \varepsilon_{t-k} + \xi_t , \qquad \text{(4.00) egyenlet}$$

ahol $\varepsilon_t = w_t - \widetilde{w}_t$, és $\xi_t$ normális eloszlású hibatag.

Egy ilyen gazdaságban Cao és Wei eredményeit felhasználva az opció értékét az alábbi formula segítségével határozzák meg:

$$V_t = E_t\left[ e^{-\rho(t)} \left( \frac{U_t(d_T)X_T}{U_d(d_t)} \right) \right] = e^{-\rho(t)} d_t^{-\gamma} E_t\left[ d_T^{\gamma} X_T \right] \qquad \text{(4.01) egyenlet}$$

ahol a γ paraméter a kockázatelutasítás mértékét fejezi ki, amely bármekkora pozitív értéket is felvehet. A γ=0 a kockázatsemleges esetet jelenti. $X_T$ a CDD opció kifizetése, azaz max[CDD-K,0], ahol K a kötési index értéke.

Számításaik szerint a piaci kockázat ára megegyezik a kockázatsemleges árazásból adódó és a „tényleges" derivatív érték közötti különbség éves szintű százalékos értékével. Azt tanácsolják, hogy különböző kockázatkerülő paraméterek mellett (a kockázatsemlegességet kifejező 0-tól az extrém kockázatkerülést jelentő 20-

ig) a (4.1) egyenletet felhasználva Monte Carlo módszerrel becsüljük meg a derivatív értékét, és számítsuk ki minden egyes esetre a kockázat piaci árát.

Az időjárási opciók árazásnak egyéb módszerei is ismertek a szakirodalomban. Az egyik a Bühlman és Platen (2002), valamint West (2002) által használt **(b) benchmark árazási módszer**. Az időjárási derivatív termék árát egy kereskedett benchmark portfólió piaci árából származtatják. Ennek azonban feltétele, hogy az időjárási derivatívákkal kereskedjenek, és a szerződéskötési árak rendelkezésre álljanak. Mivel sok ország tőzsdéjén még nem vezették be ezeket a termékeket, ez a módszer csak szűk körben használható.

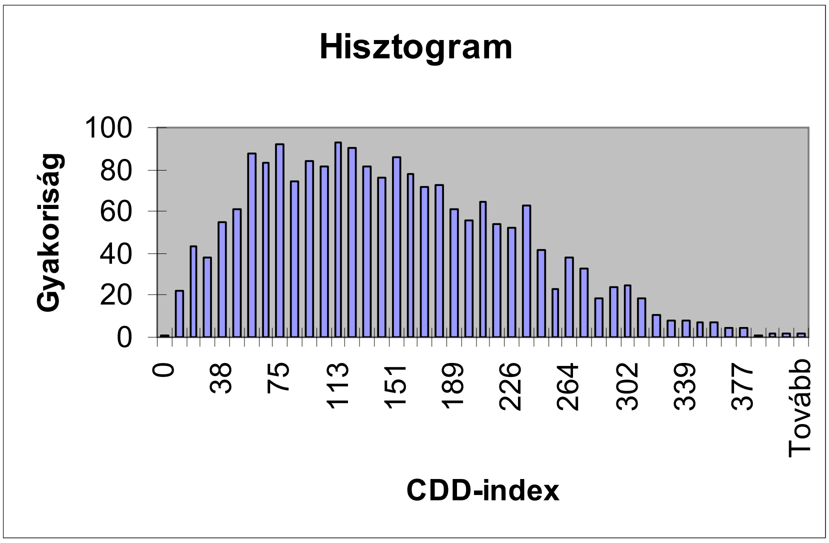
Alternatív megközelítésként az **(c) aktuáriusi módszert** is alkalmazzák, amely célja, hogy meghatározza a szerződés kifizetésének kumulatív valószínűségi eloszlásfüggvényét ($F_p$). A kifizetés várható értéke ($\mu$) és az állandó költség (e) együttesen a szerződés várható költségét (E[C]) teszik ki. A call vagy put eladója legalább akkora opciós díjat kér, amely fedezi a várható költségeit, mivel hosszú távon is nyereséges kíván maradni. Az $F_p$, $\mu$, valamint a profit standard hibája ($\sigma$) és a 10%-os valószínűség melletti VAR-érték (V) meghatározása során historikus értékeket használnak. A módszer gyenge pontja, hogy kevés historikus adat mellett nem jól becsüli meg az eloszlás szélét, valamint nem képes kezelni az időjárási indexeksorokban meglévő autokorrelációt és hosszú távú változékonyságot.

A különböző módszerek között igen nehéz a választás, amit tovább nehezít az a tény is, hogy nem minden országban kereskednek időjárási derivatívákkal.

# 5. Hipotetikus magyarországi CDD-call opció kifizetése

A továbbiakban nézzünk meg egy hipotetikus magyarországi ügyletet! Tegyük fel, hogy egy búzatermelő és egy klímaberendezéseket gyártó cég 2005. júliusára egy CDD-call ügyletet köt. A (3.11) és (3.33) egyenletek alapján Monte–Carlo szimulációval hőmérsékleti adatokat generáltam. 2000 futtatás után a CDD-index gyakorisági eloszlására a következő ábrát kaptam:

**6. ábra: A CDD-index gyakorisági eloszlása**




Most nézzük meg a szimulált hőmérsékleti adatok alapján kapott CDD-indexek leíró statisztikáit!

**5. táblázat: CDD-indexek leíró statisztikái**

| | |
|---|---|
| átlag | 143 |
| módusz | 113 |
| csúcsosság | 0,304 |
| ferdeség | 0,505 |
| minimum | 0 |
| maximum | 414,8 |

Tegyük fel, hogy egy búzatermelő nagyon fél az aszályos nyártól, így 100 kontraktusnyi CDD-call opciót vásárol, amely kötési indexe 130, a foknap-pont értéke pedig 200 forint. Továbbá tételezzük fel, hogy a maximális kifizetés értéke 2.500.000 forint.

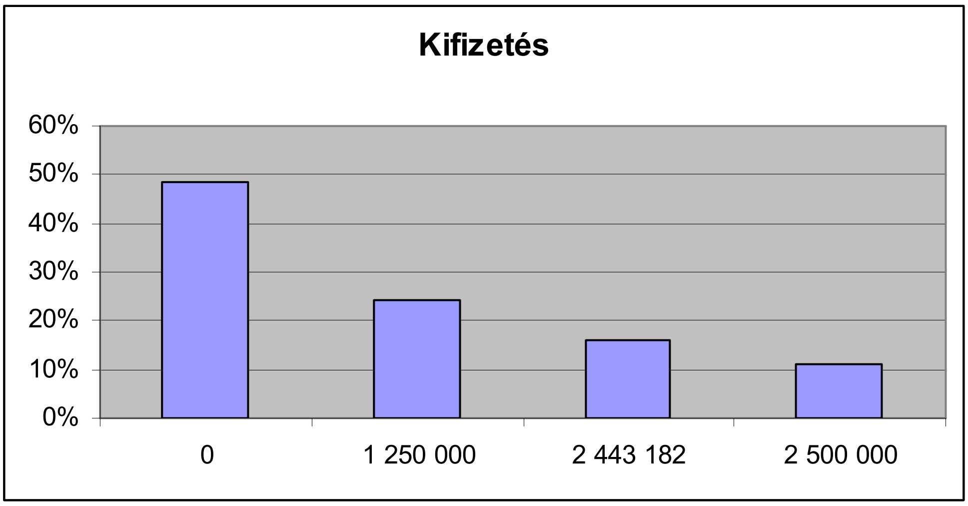
**6. táblázat: Egy hipotetikus CDD call ügylet paraméterei**

| | |
|---|---|
| kötési index | 130 |
| foknap-pont | 200 |
| kontraktusszám | 100 |
| maximum kifizetés | 2.500.000 |

A szimulált hőmérsékleti adatok alapján a következő gyakorisági eloszlást kapjuk a termelő várható nyereségére:

Az esetek 49 százalékában a termelő nem fogja lehívni az opciót, a vesztesége az opciós díj, míg az esetek 51 százalékában élni fog az opciós jogával. Mivel az egyes kifizetések valószínűsége 1/2000, meg tudjuk határozni a várható értékét is, ami 708.472 forint. Megfelelő kamatláb és kockázatelutasítási paraméter mellett meghatározható ennek az összegnek a jelenértéke is.

**7. ábra: Egy hipotetikus ügylet kifizetése**




A tényleges hőmérsékleti adatok alapján 2005. júliusára a CDD index értéke 115 volt, aminek következtében a 130-as kötési indexszel bíró opció értéke nulla, a búzatermelő nem hívja le az opciót.

## 5.1. Hatékony fedezési stratégia

Az időjárási derivatíva használat akkor bizonyul hatékony fedezési módszernek, ha az alaptermék, jelen esetben a CDD index és a vállalat valamilyen fontos gazdasági változója (pl. kibocsátás, bevétel, profit, költség) között szoros korreláció áll fenn. Richards, Manfredo és Sanders (2004) szerint egy búzatermelő esetében a búzatermés (y) a májustól júliusig, azaz 92 nap alatt kiszámított CDD index (c) és egy lineáris trend függvénye:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 c_t + \beta_2 c_t^2 + \beta_3 t + \varepsilon_t \, , \qquad \text{(5.10) egyenlet}$$

ahol $y_t$ a t-edik évi hektáronként búzatermés, tonnában kifejezve.

A modellt felhasználva az 1960 és 2001 közötti időszakra megvizsgáltam, hogy van-e összefüggés a baranya megyei búzatermésátlagok és a budapesti hőmérsékleti adatok alapján kiszámolt CDD indexek között. A budapesti hőmérsékleti adatok helyett természetesen jobb lenne pécsi adatokból kiszámítani a CDD index értékét, hiszen ez csökkentené a báziskockázatát. Úgy vélem azonban, hogy amennyiben lenne tőzsdei kereskedelem, akkor is valószínűleg csak a fővárosra számított indexekkel kereskednének, így a budapesti hőmérsékleti adatok használata a valóságtól nem elrugaszkodott.

Meglepő módon a CDD index négyzete nem lett szignifikáns, viszont a két évvel korábbi késleltetett értéke már igen. Az autoregresszivitás „eltüntetése" érdekében a termésátlag egy évvel korábbi értékeit is szerepeltettem az egyenletben.

**7.táblázat**[2]

Dependent Variable: **BUZA**
Method: Least Squares
Date: 05/02/06 Time: 21:56
Sample(adjusted): 1963 2001
Included observations: 39 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 6 iterations

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 3.900724 | 0.732820 | 5.322898 | 0.0000 |
| T | 0.079100 | 0.023587 | 3.353475 | 0.0020 |
| CDD | -0.003740 | 0.001482 | -2.523067 | 0.0165 |
| CDD(-2) | -0.003510 | 0.001479 | -2.373990 | 0.0234 |
| AR(1) | 0.668373 | 0.130507 | 5.121344 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | **0.831306** | Mean dependent var | 4.335385 |
| Adjusted R-squared | 0.811460 | S.D. dependent var | 1.207566 |
| S.E. of regression | 0.524340 | Akaike info criterion | 1.665856 |
| Sum squared resid | 9.347703 | Schwarz criterion | 1.879133 |
| Log likelihood | -27.48420 | F-statistic | 41.88708 |
| Durbin-Watson stat | 2.435882 | Prob(F-statistic) | 0.000000 |
| Inverted AR Roots | .67 | | |

A 7. táblázat alapján elmondható, hogy szignifikáns kapcsolat van a hőmérséklet és a terméshozam között ($R^2$=0,83). A búzatermelő először meghatározza azt a terméshozamot, amely alatt már vesztesége keletkezik, majd a modell alapján kiszámítja, hogy milyen kötési indexszel rendelkező CDD opciót kell vásárolnia.

[2] A termésátlag adatok forrása: KSH

# 6. Összefoglalás

Az időjárás jelentős módon befolyásolja a különböző gazdasági szektorok tevékenységét. Ez a ráhatás azonban földrajzilag és szezonálisan eltérő mértékű lehet. Leginkább az energiaszolgáltatás, a mezőgazdaság és a vendéglátóipar van kitéve az időjárás változékonyságának. A pénzügyi piac azonban megoldást kínál erre a problémára: az időjárási derivatívák képesek csökkenteni a kedvezőtlen időjárás által okozott bevételkiesések kockázatát. A legelterjedtebb időjárási indexek a hűtési foknap index (CDD), a fűtési foknap index (HDD), valamint az esőre és a hóesésre vonatkozó indexek, amelyekre különféle ügyleteket, mint például opciós vagy swap szerződést lehet kötni.

Ha egy gazdasági szereplő, pl. búzatermelő úgy dönt, hogy egy esetleges túl meleg nyár miatti terméscsökkenés kockázatát CDD opcióval szeretné fedezni, akkor a következő feladatokat kell végrehajtania:

- hőmérsékleti adatokat kell szereznie a hivatalos nemzeti meteorológiai szolgálattól;
- sztochasztikus modellt kell felépítenie a napi hőmérsékleti megfigyelésekre;
- a historikus adatok alapján meg kell becsülnie a modell paramétereit;
- a jövőre nézve Monte Carlo módszerrel szimulálnia kell a hőmérséklet alakulását;
- a kapott hőmérsékleti adatok alapján meg kell határoznia a CDD index értékét és a várható kifizetéseket;
- majd diszkontálnia kell a kifizetések átlagos értékét.

A 3. és 5. fejezetben ezeket a lépéseket mutattam be egy 45,5 évet felölelő budapesti napi átlaghőmérsékleti idősor és egy hipotetikus opciós ügylet keretében.

Az árazást azonban nehezíti, hogy a hőmérséklet nem kereskedett alaptermék, így a kockázatsemleges árazást nem lehet használni. A hagyományos aktuáriusi megközelítés is csak korlátozott érvényű a historikus adatokban meglévő autokorreláció és hosszú távú változékonyság miatt. Érdekes megoldást kínál a Lucas-féle általános egyensúlyi modellben levezetett árazási módszer, amely segítségével meg lehet becsülni a piaci kockázat árát.

Ha az időjárási derivatívák nemzetközi piaca likvidebbé válna, akkor az új termékeket szélesebb körben használnák kockázatfedezési eszközként, ami az árazásukat is megkönnyítené. A különböző időjárási indexekre szóló opciók és swapok jelentősege azonban vitathatatlan. Az 5.1. alfejezetben bemutatott regressziós modell is alátámasztja, hogy a búza termésátlaga és a CDD index között sziginifikáns kapcsolat van, ami alapján a termelő ki tudja alakítani a megfelelő kockázatfedezési stratégiáját.

A vállalatoknak és a mezőgazdasági termelőknek tehát nem kell tétlenül nézniük, hogy az időjárás szeszélyének kitéve hogyan változik a bevételük: az időjárási derivatívák segítségével a bevétel kilengései is csökkenthetők.

## 7. Irodalomjegyzék


**Against, T. és K. Kranhold (1999):** „Coat Peddlers Turn to Forecasters to Beat Winter Heat”, *Wall Street Journal*, February 18, 1999, B1 és B9 o.

**Alaton, Peter, Boualem Djehiche és David Stillberger (2001)**: „On Modelling and Pricing Weather Derivatives”, Working Paper, Department of Mathematics, KTH, Stockholm, SE, 2001. http://www.math.kth.se/matstat/fofu/reports/weather.pdf

**Bakshi, G., C. Cao és Z. Chen (1997)**: „Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models”, *Journal of Finance,* Vol. 52, 1997, 2003-2048. o.

**Ball, C.A. és W.N. Torous (1983)**: „A Simplified Jump Process for Common Stock Returns”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* Vol. 19, March 1983, 53-65.o.

**Ball, C.A. és W.N. Torous (1985)**: „On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing.” *Journal of Finance,* Vol. 40, 1985, 155-173.o.

**Bates, D.S. (1996)**: „Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options.” *Review of Financial Studies,* Vol. 9, 1996, 69-107. o.

**Barrieu, Pauline és Nicole El Karoui**: „Optimal Design of Weather Derivatives”, http://www.algorithmus.com/research/spring02/WeatherDerivatives.pdf

**Bibby, B.M. és M. Sørensen (1995)**: „Martingale Estimation Functions for Discretely Observed Diffusion Processes”, *Bernoulli*, Vol. 1., No. 1-2., March/June 1995.

**Black, F. és M. Scholes (1973)**: „The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, 1973, 637-655.o.

**Bollerslev, T. (1986)**: „Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”, Journal of Econometrics, Vol. 31, 1986, 307-327. o.

**Boyle, P. (1977)**: „Options: A Monte Carlo Approach”, Journal of Financial Economics, Vol. 4, 1977, 323-338. o.

**Brix, Anders és Stephen Jewson (2004)**: „Weather derivative pricing and spatial variability of US temperature trends”, April 27, 2004. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=535924

**Cao, Melanie és Jason Wei (2002)**: „Equilibrium Valuation of Weather Derivatives”, Working Paper, The Rotman Graduate School of Management, The University of Toronto, Toronto, Ontario, May, 2002. http://www.rotman.utoronto.ca/~wei/research/weather.pdf

**Davis, Mark**: „Pricing Weather derivatives by marginal value”, *Quantitative Finance* Vol. 1, 2001, 305-308. http://www.ma.ic.ac.uk/~mdavis/docs/weather.pdf

**Dischel, Bob**: „Seasonal weather forecasts and derivatives valuation", Weather risk-Forecast data, www.finance.com/public/edit/energy/weather00/wthr00-forecast.html

**Dunis, Christian L. és Vassilios Karalis (2003)**: „Weather Derivatives Pricing and Filling Analysis for Missing Temperature Data", January 2003, http://cwis.livfm.ac.uk/bus/cibef/workingpapers/cibef0103.pdf

**Garman, Mark, Carlos Blanco és Robert Erickson (2000):** „Weather Derivatives: Instruments and Pricing Issues", 2000 http://www.fea.com/resources/pdf/a_weather_derivatives.pdf

**Hull, J. C. és A. White (1987)**: „The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, Vol. 42, 1987, 281-300. o.

**Jewson, Stephen (2004)**: „Weather derivatives pricing and the year ahead forecasting of temperature part 1: empirical results", April 24, 2004. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=535142

**Jewson, Stephen (2004)**: „Weather derivatives pricing and the year ahead forecasting of temperature part 2: theory", April 24, 2004. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=535143

**Jewson, Stephen (2004)**: „Weather derivates pricing and the potential accuracy of daily temperature modelling", April 24, 2004. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract:id=53122

**Kántor, Endre (2004)**: Kereskedés az időjáráspiacon, 2004. dec. 8. (http://origo.hu/uzletinegyed/befektetes/20041207kereskedes.html

**Lucas, R. E. (1978)**: „Asset Prices ina n Exchange Economy", *Econometrica*, Vol. 46, 1978, 1429-1445. o.

**Nelken, Izzy**: „Weather Derivatives-Pricing and Hedging", Mundelein, Illinois: Super Computer Consulting, Inc. http://www.supercc.com/papers/Weather.pdf

Pricing Weather Derivatives, http://www.derivativesstrategy.com/magazine/archieve/2000/0300col1.asp?print

**Richards, Timothy J., Mark R. Manfredo és Dwight R. Sanders (2004)**: „Pricing Weather Derivatives", *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 86. No. 4., November 2004, 1005-1017. o. , elérhető még: http://www.blackwell-synergy.com/servlet/useragent?func

**Sankaran, Karthikeyan**: „Finding a value", Weather risk-weather bond pricing, elérhető: www.financewise.com/public/edit/energy/weather00/wthr00-weatherbond.html

**Turvey, C. (2001)**: „A Pricing Model for Degree-Day Weather Options", Working Paper, Department of Agricultural Economics and Business, University of Guelph, Guelph, Ontario, July 2001.

**Weather Risk Advisory (2001)**: „Valuation of Weather Derivatives", 13 June 2001, http://isola.org/c_and_a/GarpPresentationJMG.ppt

**West, Jason (2002)**: „Benchmark Pricing of Weather Derivatives", Working Paper, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney, Australia, December 3, 2002, elérhető még: http://www.business.uts.edu.au/qfrc/conferences/qmf2002/West-J.pdf

**Yoo, S. (2003)**: „Weather Derivatives and Seasonal Forecast". Working Paper, Department of Applied Economics and Business, Cornell University, Ithaca, NY, January 2003.

**Zanders Partners Treasury Consultans**: „Valuation of weather derivatives using Monte Carlo simulation", elérhető: http://www.gtnews.com/article/2052.pdf

**Zeng, Lixin (2000):** „Pricing Weather Derivatives", *Journal of Risk Finance* Vol. *2*, Spring2000, 72-78. o. elérhető még:http://www.atmos.Washington.edu/~lixin/Zeng2000.pdf